TD Mercredi

Polynômes orthogonaux

18 mars 2017

1 Généralités

1.1

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide, w une application continue de I dans $]0,+\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t \mapsto t^n w(t)$ soit intégrable. On munit alors $E = \mathbf{R}[X]$ du produit scalaire défini par $< P|Q >= \int_I P(t)Q(t)w(t)dt$.

a) Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \deg(P_n) = n \text{ et } \forall (m,n) \in \mathbf{N}^2, n \neq m \Rightarrow \int_I P_n(t)P_m(t)w(t)dt = 0.$$

b) Montrer que, si Q_n est une autre suite de polynômes vérifiant la propriété ci-dessus, il existe une suite $(\lambda_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que $P_n = \lambda_n Qn$.

c) Prouver que chaque polynôme P_n possède n racines distinctes dans l'intérieur de I.

d) Prouver qu'il existe des suites réelles a_n, b_n, c_n telles que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_{n+1} = (a_n x + b_n)P_n - c_n P_{n-1}.$$

e) Exemple des polynômes de Legendre

1.2 Formule de Gauss, application

On suppose désormais que I est un segment $[a,b]$, et que $< P_n, P_n >= 1$ pour tout n.

a) Montrer que, pour toute fonction $f \in C([a,b], \mathbf{R})$,

$$\int_a^b f^2(t)w(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} < f, P_n >^2 .$$

b) On fixe $n \in \mathbf{N}^*$ et l'on note $x_1, \ldots, x_n$ les zéros de P_n.
i) Montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout polynôme $Q \in R_{2n-1}[X]$, on ait

$$\int_a^b Q(t)w(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(x_i).$$

ii) Montrer que les λ_i sont strictement positifs.

c)) Soit A la réunion des zéros de tous les polynômes P_m. Montrer que A est dense dans I.

2 Polynômes d'Hermite

On se place dans le cas où $I = \mathbf{R}$ et $\overset{\omega(t)}{\cancel{f}(t)} = e^{-t^2/2}$,
a) Montrer que la suite $P_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2}(e^{-t^2/2})^{(n)}$ vérifie les conditions de 1-a) et calculer les normes des P_n.

b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que la fonction $u \to e^{ux-u^2/2}$ possède sur $\mathbf{R}$ un développement en série entière de la forme $\sum H_n(x)\frac{u^n}{n!}$ où H_n est un polynôme de degré n dont on précisera les coefficients.

c) Comparer H_n et P_n. Préciser la relation de récurrence déteminée en 1)-d). Comparer H'_{n+1} et H_n.

d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $S \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)S(x)e^{-x^2/2}dx = P(0)$.

e) (**) Déterminer, parmi les polynômes de degé $\leq n$ vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)e^{-x^2/2}dx = 1$, ceux qui maximisent $|P(0)|$. On en donnera un expression à l'aide des H_n puis de H_{n+1}.

f) Montrer à partir des résultats de la question c) que $H''_n - xH'_n + nH_n = 0$.

g) On définit la suite de fonctions ϕ_n par $\phi_n(x) = \exp(-x^2/4)H_n(x)$. Montrer que $\phi''_n - \frac{x^2}{4}\phi_n + (n + \frac{1}{2})\phi_n = 0$.

h) Montrer que les états stationnaires de l'oscillateur harmonique quantique (potentiel $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$) ont pour énergie $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$ avec $n \in \mathbf{N}$. On posera $\varphi_n(x) = \phi_n(\alpha x)$ avec α bien choisi et la question **1.1.c)** n'est pas inutile ici.